

LA DIVINE PROPORTION

Présentation

De nombreux livres ont été consacrés au «Nombres d'Or», en particulier celui écrit au XV^{ème} siècle par le moine Luca Pacioli contemporain de Léonard de Vinci: «*De divina proportione*». On trouve des applications de cette «Divine Proportion» dans de nombreuses constructions et œuvres d'art depuis les temples égyptiens, jusqu'à nos jours. Depuis le Parthénon dont le plan est construit sur un rectangle dérivé de F, dans les œuvres de Dürer de Léonard de Vinci et par exemple la tour Saint Jacques à Paris dont les hauteurs des trois étages se répartissent en partant du haut selon une progression géométrique de raison F. Plus proche de nous, le groupe de peintre créé en 1911 sous le nom de «Section d'Or» par Jacques Villon.

Sans vouloir suivre les élucubrations mystico-vasouillardes des pseudo-ésotéristes, on peut constater que, si l'on demande à un nombre suffisant de personnes de partager un segment de droite donné en deux parties de manière que l'ensemble leur paraisse particulièrement esthétique le pourcentage de celles qui placeront le point de division entre les 5/8 et 2/3 de la droite dépasseront largement les 50%. De même, si l'on montre une collection de rectangles dont le rapport longueur/largeur varie de 1 (carré) à 3 par exemple, à un nombre important de personnes, en leur demandant celui qu'elles trouvent le plus beau, dans un grand pourcentage des cas ce sera le rectangle dont le rapport L/l est proche de F qui obtient le maximum des suffrages.

Personnellement, lorsque j'ai voulu rénover la vieille maison que j'ai achetée en Bretagne, j'ai découvert que les dimensions de la pièce de séjour où l'on s'asseyait particulièrement bien, mesurait 8,20 m par 5,10 m soit un rapport L/l = 1,607, valeur très voisine de F.

Les professionnels de l'image, peintres et photographes, savent bien qu'il est bon de placer sur quoi on veut attirer l'attention à l'un des points forts de l'image, soit entre les 2/3 et les 5/8. Cela nous amène à la notion de tracé régulateur. L'analyse de nombreux tableaux de maîtres montre que de tous temps les artistes ont bâti leurs œuvres sur un canevas où l'on retrouve souvent le nombre d'or.

La figure 1 reproduit une gravure d'Albrecht DÜRER extraite de son «Instructions sur la manière de mesurer» avec son tracé régulateur (fig. 2)

Cela nous conduit à étudier succinctement la géométrie d'un nombre d'or avec la division d'un segment de droite en moyenne et extrême raison.



)
Figure 1; Comment dessiner une femme couchée (extraite de l'ouvrage «Instructions sur la manière de mesurer»

Division d'un segment de droite en moyenne et extrême raison. Il s'agit d'un problème classique. Considérons un segment de droite AB et proposons-nous de déterminer un point M, situé entre A et B, tel que: [1] $AB/AM = AM/MB$

relation que l'on transforme aisément, par un calcul, en:

$$[2] \quad AB^2 = AM(AB + AM).$$

relation quel'on transforme aisément, par un calcul élémentaire, en:

$$[2] \quad AB^2 = AM(AB + AM).$$

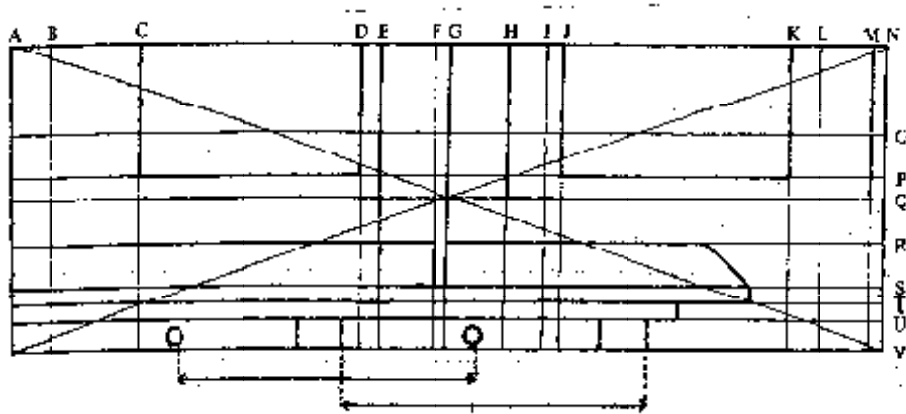


Figure 2: Tracé régulateur du dessin de la figure 1

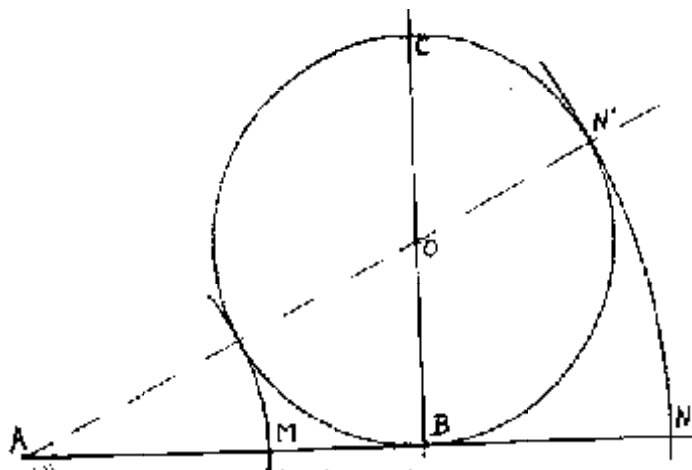
De cette dernière expression, on tire (fig. 3) une construction qui figurait jadis dans les ouvrages scolaires de géométrie élémentaire. Menons le segment de droite BC, perpendiculaire à AB et de longueur $BC = AB$. Traçons le cercle de diamètre BC et de centre O, ainsi que la droite passant par A et O, qui coupe le cercle en question aux points M' et N'. On sait que

$$[3] \quad AB^2 = AM' \times AN' = AM'(AM' + M'N')$$

ou encore, puisque $M'N' = BC = AB$:

$$[4] \quad AB^2 = AM'(AB + AM').$$

Figure 3: Division d'un segment de droite en moyenne et extrême raison



Sil'on rapproche cette dernière expression de l'expression [2] on en déduit que: $AM = AM'$.

Pour obtenir le point M cherché, il suffit de porter sur AB, à partir de A, une longueur égale à AM' . Le point M se trouve parfaitement défini par le rapport AB/AM et le calcul montre que ce rapport n'est autre que le nombre d'or.

Reportons à partir de A, sur le segment AB et son prolongement vers la droite, une longueur AN égale à AN' . On vérifie aisément que: $AB/AM = AB/BN = \Phi$

En langage ordinaire, cela veut dire que le point B divise le segment AN en moyenne et extrême raison (de même que M divise le segment AB en moyenne et extrême raison). Insistons sur la double propriété remarquable de la division représentée par le nombre Φ , telle qu'elle ressort des relations entre les trois segments AB, AM et MB:

$$1^\circ \quad AB = AM + MB.$$

L'un des segments est la somme des deux autres.

2° La condition [1] s'écrit également : $AM^2 = AB \times MB$. La longueur de l'un des segments est la moyenne géométrique des longueurs des deux autres. Cette double propriété est spécifique d'un nombre d'or.

Remarquons encore que les quatre segments MB, AM, AB et AN, pris dans cet ordre, ont des longueurs qui forment une progression géométrique croissante de raison égale Φ .

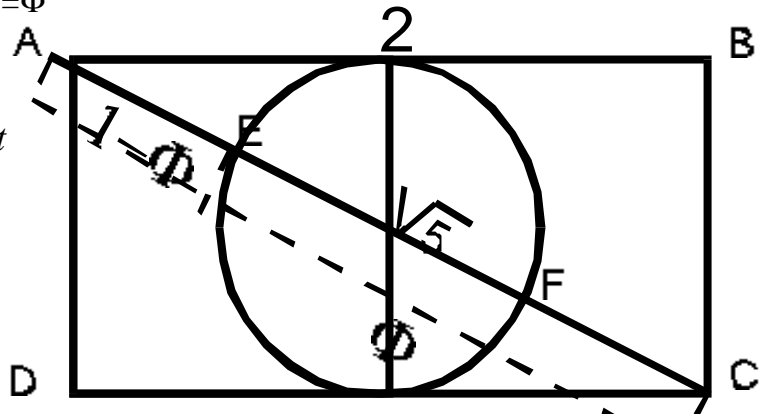
Autre méthode pour tracer la proportion dorée

La figure 4 nous montre une autre méthode pour construire la section d'or à partir d'un « carré long » – rectangle dont le rapport $L/l = 2$ – on a $AB/BC = 2$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4 + 1$$

d'où $AC = \sqrt{5}$, $AF = \sqrt{5} - 1$ d'où $AB/AF = \Phi$

Figure 4 : Construction de Φ et de $\Phi - 1 = 1/\Phi$ à partir d'un double carré



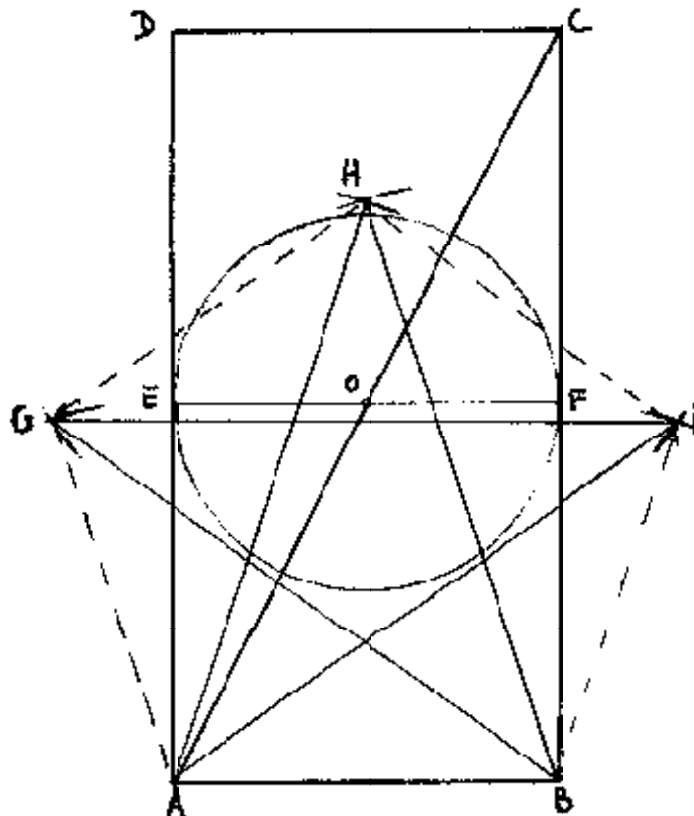
A partir de ce tracé, on peut construire un pentagramme étoilé :

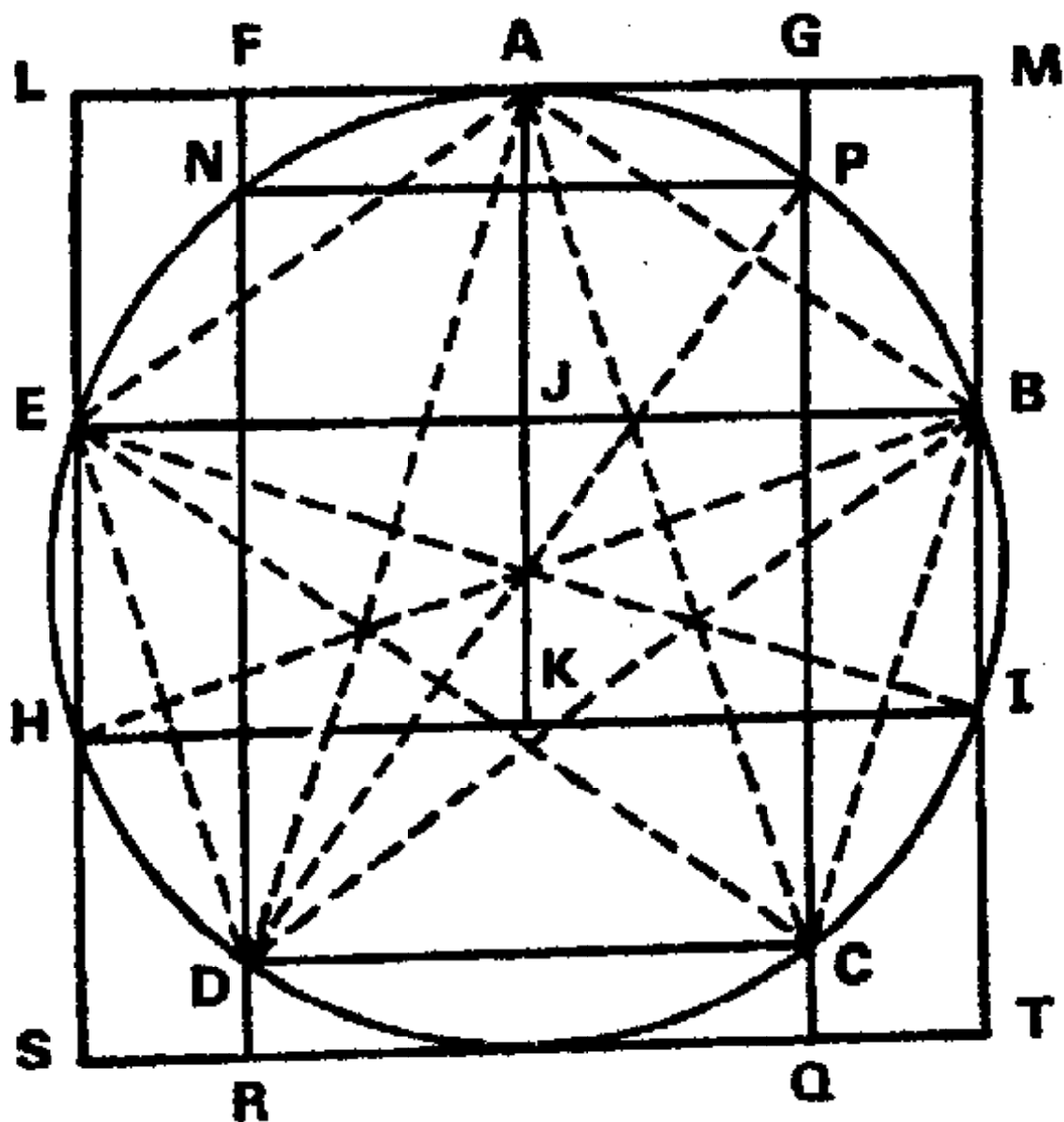
A partir de A et de B comme centre et une ouverture de compas égale à AF de la figure précédente, on trace deux arcs de cercle qui se coupent en H. En traçant les droites AH et BH on obtient la pointe supérieure de l'étoile. Sans changer l'ouverture du compas, traçons des arcs de cercles avec respectivement A et H comme centre on obtient le point G et I qui constituent les autres pointes de l'étoile.

Figure 5 : Construction d'un pentagramme étoilé à partir du rectangle de la figure 4.

De cette construction on peut tirer une série de rectangles dont le rapport L/l est en relation avec le Nombre d'Or

Voir figure 6 pages suivantes





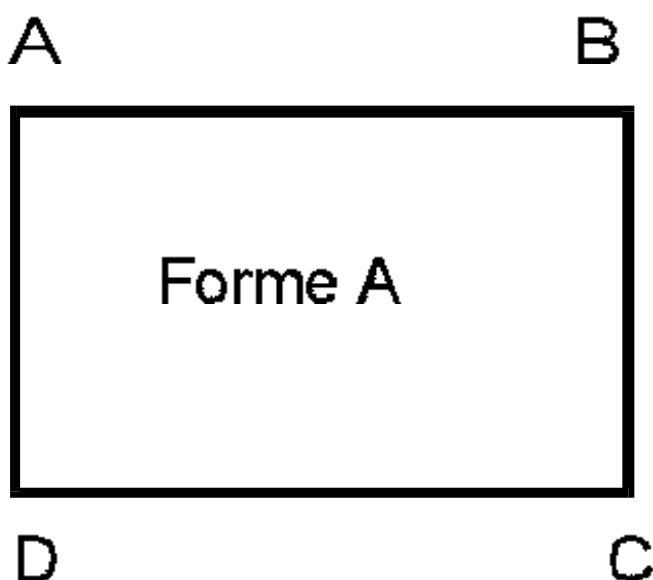
Rapports des différents rectangles issus de Φ avec le pentagone et le décagone réguliers

Rectangles dont les proportions sont reliées à Φ

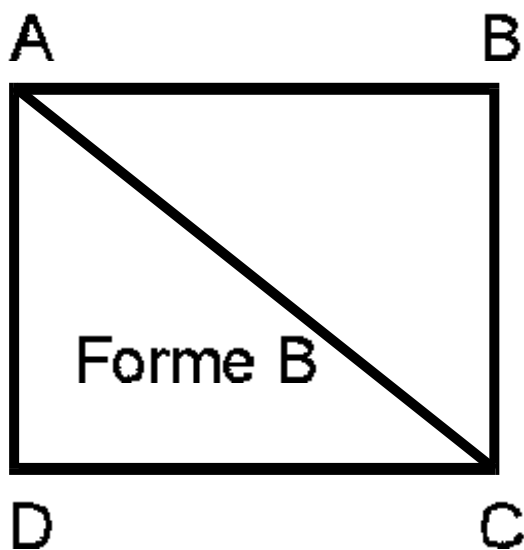
Sur la figure 6, on observe la présence de différents rectangles dont le détail est reproduit Fig. 7 et dont les proportions se rapportent toutes plus ou moins directement à Φ . Nous n'entrerons pas dans le détail de leur construction. Nous conseillons à ceux qui désireraient entrer plus avant dans cette étude de se reporter à l'étude consacrée au Nombre d'Or dans la Collection Que Sais-je (n°1530) par Marius CLEYTET-MICHAUD.

Toutefois, il est intéressant de remarquer que le rectangle de la forme K correspond à un rectangle qu'une diagonale partage en deux triangles rectangles possédant une propriété remarquable : les mesures de leurs trois angles sont en progression géométrique de raison Φ .

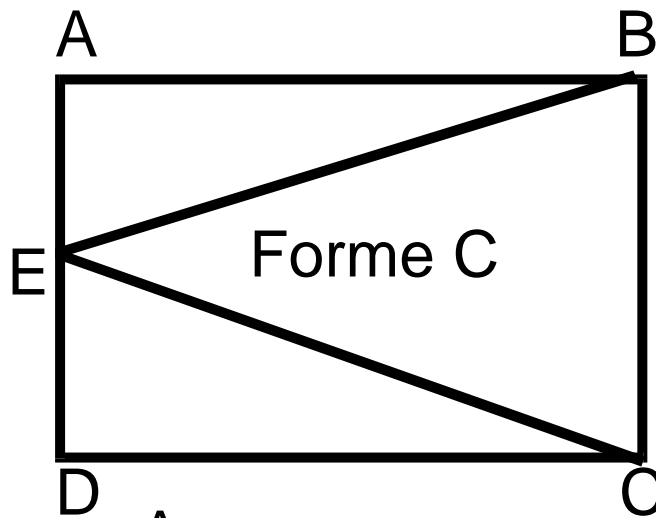
Figure 7: Détails des différents rectangles issus de la figure 6. Certaines formes (de A à F) sont en rapport direct avec le Nombre d'Or. Les autres (de G à K) sont plus particulièrement en rapport avec les angles du pentagone et du décagone réguliers



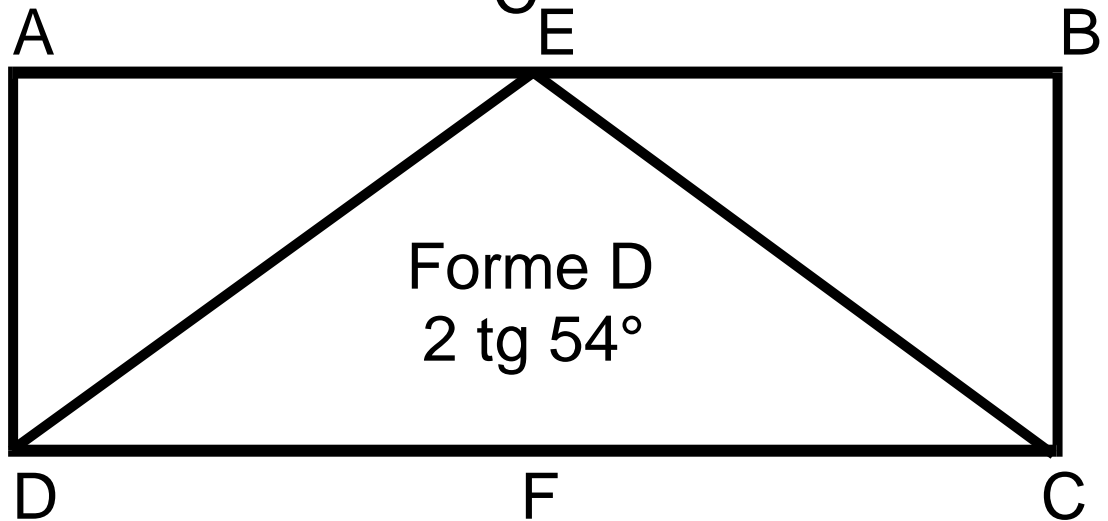
$$\begin{aligned} AB / BC &= \Phi \\ &= 1,618 \end{aligned}$$



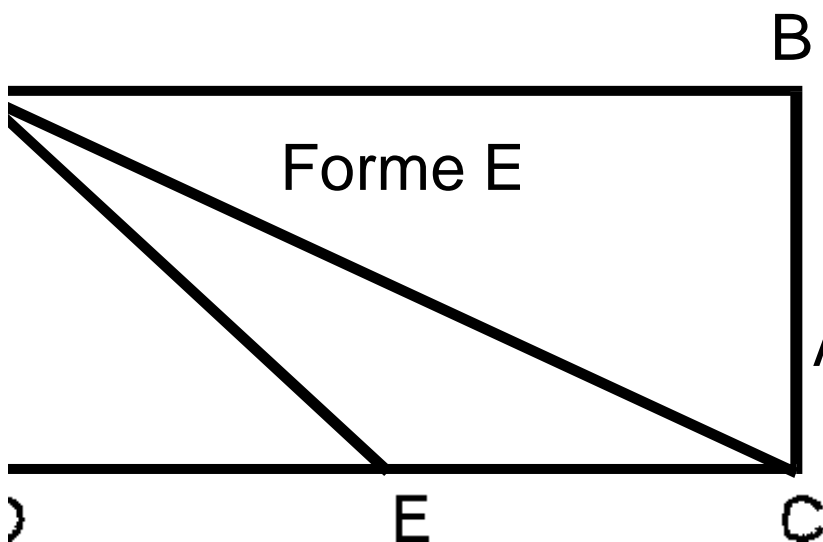
$$\begin{aligned} AC / AB &= \Phi \\ AB / BC &= 1,272 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AE &= ED \\ BE / BC &= \Phi \\ AB / BC &= \\ 1/2 \operatorname{tg} 54^\circ &= \end{aligned}$$

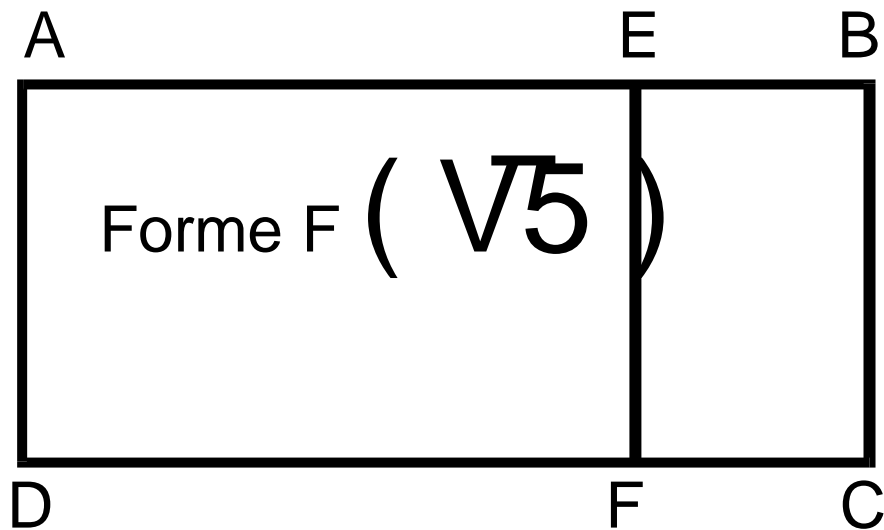


$$\begin{aligned} AE &= EB \\ DC / DE &= \Phi \\ AB / BC &= 2 \operatorname{tg} 54^\circ = 2,752 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} DE &= EC \\ AC / AE &= \Phi \\ AB / BC &= 2 \sqrt{\Phi / 3 - \Phi} \end{aligned}$$

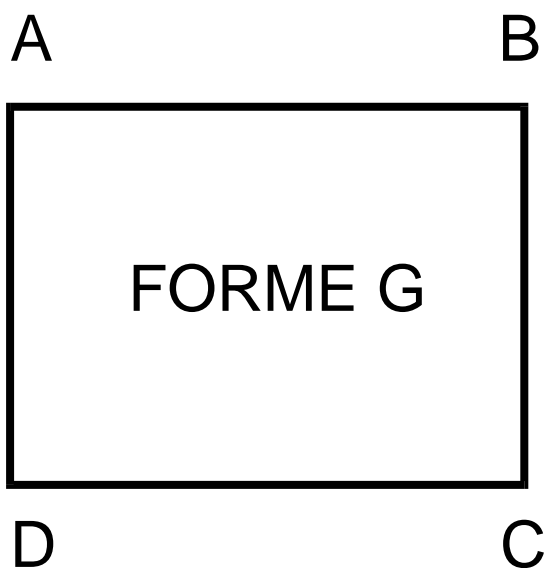
Figure 7 – Suite 2



$$AB / BC = \sqrt{5} = 2.236$$

$$AE / AD = \Phi$$

$$BC / BE = \Phi$$

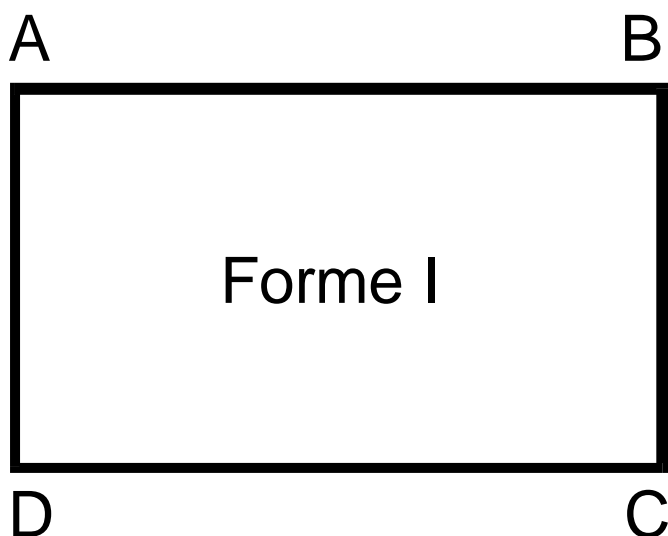
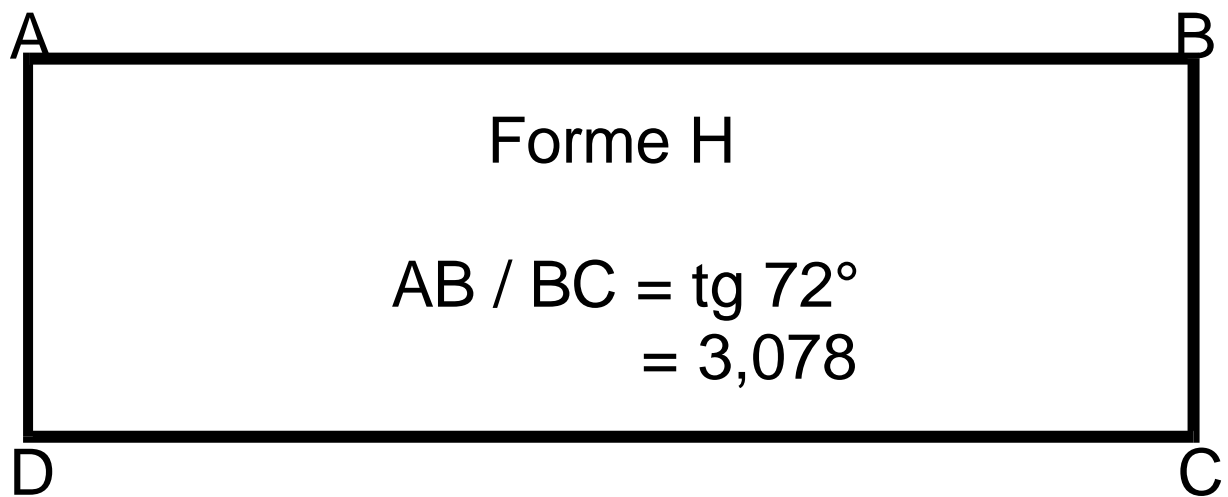
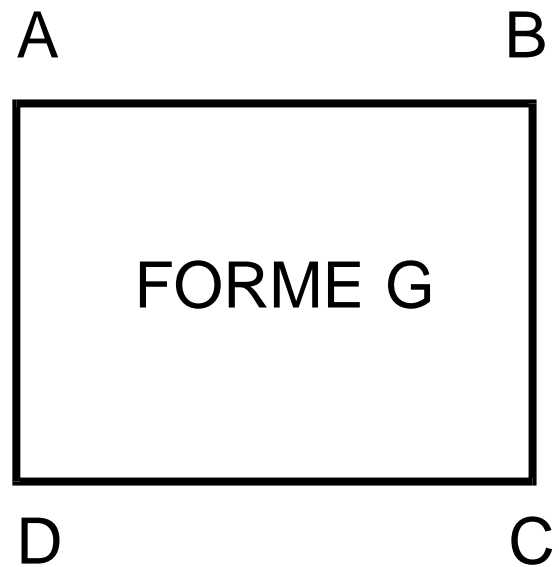


$$AB / BC = \operatorname{tg} 54^\circ = 1,376$$

Figure 7bis: Rectangles issus de la figure 6 mais dont l'appartenance à F est moins évidente

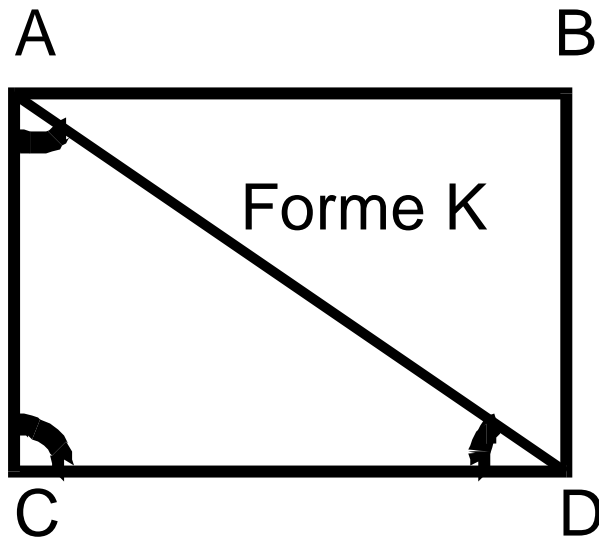
Figure 7 bis – Suite

$$\begin{aligned} AB / BC &= \operatorname{tg} 54^{\circ} \\ &= 1,376 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB / BC &= 1 / \sin 36^{\circ} \\ &= 1,701 \end{aligned}$$

Figure 7bis–Suite



Forme transcendante:
Les mesures des angles
A, D et C suivent une
progression géométrique
de raison Φ

Exemple d'utilisation Pratique

Il est possible, même recommandé, d'utiliser la proportion dorée pour de nombreuses applications, *mais surtout pas d'une manière trop systématique* car on risquerait de tomber dans la monotonie. Heureusement, on dispose d'un bon nombre de rapports issus plus ou moins directement de Φ ce qui permet une bonne variété de proportions.

A titre d'exemple essayons d'établir le projet pour une grande table, du type table de ferme. Une dimension est imposée au départ, la hauteur : 78 cm. Nous déciderons que le plateau, en bois massif, aura une épaisseur de 5 cm et débordera du piétement de 5 cm de chaque côté.

Commençons par la largeur du piétement. Nous l'inscrivons dans un rectangle de forme B ($\sqrt{\Phi}$) ce qui donne :

Hauteur : $78 - 5$ (épaisseur du plateau) = 73 cm

Largeur : $h \times \chi = h \times 1,27 = 92,71$ arrondi à 93 cm

Dimensions du plateau (nous l'inscrivons dans un rectangle de forme E (rectangle "Parthénon") :

Largeur : c'est celle du piétement plus deux fois 5 cm soit 103 cm

Longueur : $103 \times 2,164 = 222,89$ arrondi à 223 cm

Cela nous donne une assez belle table autour de laquelle on peut aisément manger 10 ou 12 personnes. On trouvera un plan succinct à la figure 8.

L'auteur a réalisé cette table pour sa maison de Bretagne.

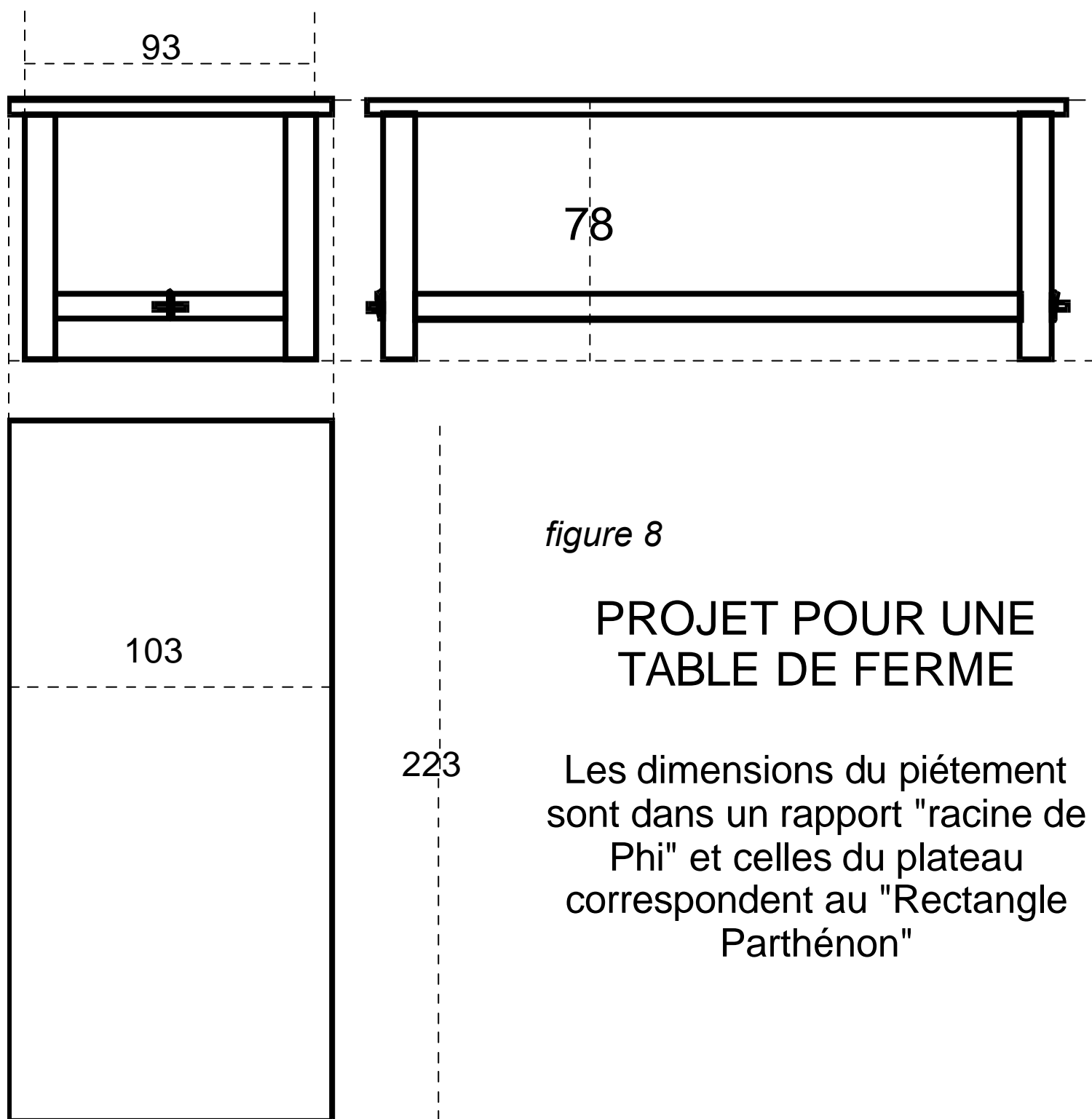


figure 8

PROJET POUR UNE TABLE DE FERME

Les dimensions du piétement
sont dans un rapport "racine de
Phi" et celles du plateau
correspondent au "Rectangle
Parthénon"